

Fortgeschrittenenpraktikum für Bachelorstudenten der Physik

Versuch T7

Gasdetektoren und Statistik

Dezember 2016

Voraussetzungen

- Durchgang geladener Teilchen durch Materie
- Gasgefüllte Teilchendetektoren
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Statistik

Versuchsziel

- Betrieb von Gasdetektoren
- Messung statistischer Verteilungen

Inhaltsverzeichnis

1 Gasdetektoren	3
1.1 Prinzip des Gasdetektors	3
1.2 Arbeitsbereiche eines Gasdetektors	3
1.3 Die Ionisationskammer (Beispiel für einen simplen Gasdetektor)	4
1.4 Das Proportionalzählrohr	5
1.5 Das Geiger-Müller-Zählrohr	6
2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Statistik	9
2.1 Binomial-, Poisson- und Gaußverteilung	9
2.2 Streuung und Messunsicherheit	10
2.3 Die χ^2 -Anpassung	10
2.4 Der χ^2 -Test	12
3 Versuchsdurchführung	14
3.1 Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr	14
3.2 Messungen zur Statistik	14
3.3 Messung der Charakteristik eines Proportionalzählers	14
3.3.1 Falls dieser Versuchsteil vor dem Geiger-Müller-Zählrohr stattfindet	15
4 Versuchsauswertung	15
4.1 Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr	15
4.2 Messungen zur Statistik	15
4.3 Messungen mit dem Proportionalzählrohr	16
A Eigenschaften der verwendeten radioaktiven Präparate	17
B Bethe-Bloch-Formel	17

Literatur

- [1] Gerd Otter, Raimund Honecker: Atome – Moleküle – Kerne,
Band I: Atomphysik, Band II: Molekül- und Kernphysik, Bo 184
- [2] William R. Leo: Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Dr 155
- [3] Konrad Kleinknecht: Detektoren für Teilchenstrahlung, Dr 143
- [4] Walter Blum, Luigi Rolandi: Particle Detection with Drift Chambers, Dr 181
- [5] Claus Grupen: Teilchendetektoren, Dr 189
- [6] Hanno Krieger: Strahlenphysik, Dosimetrie und Strahlenschutz, Du 130
- [7] Siegmund Brandt: Datenanalyse, mit Beispiel- und Übungsbuch, Cu 202
- [8] Strahlenschutzverordnung, <http://www.bfs.de>
- [9] The Particle Detector Brief Book, <http://physics.web.cern.ch/Physics/ParticleDetector/BriefBook/>
- [10] Detecting Particles: How to see without seeing,
www.physics.ucdavis.edu/Courses/Physics252b/Lectures/252b_lecture6.ppt
- [11] Properties of argon-ethane/methane mixtures for use in proportional counters, Nuclear Instruments and Methods, vol. 188, issue 3, pp. 521-534, (10/1981)

1 Gasdetektoren

1.1 Prinzip des Gasdetektors

Für den Nachweis ionisierender Strahlen werden häufig gasgefüllte Detektoren verwendet. Der Nachweis beruht auf der Ionisation der Gasatome, die durch einfallende Strahlung hervorgerufen wird. Man unterscheidet drei Typen von Detektoren:

1. Ionisationskammer (nicht Bestandteil dieses Versuches)
2. Proportionalzählrohr oder -kammer
3. Geiger-Müller-Zählrohr

Ein ionisierendes Teilchen erzeugt auf seinem Weg durch den mit einem Zählgas gefüllten Detektor Elektronen und positive Ionen. Die Elektronen bewegen sich sehr schnell auf die Anode zu, während die Ionen relativ langsam zur Kathode wandern. Ist das elektrische Feld an der Anode sehr stark (Proportional- und Geiger-Müller-Zählrohr), so werden die Elektronen in unmittelbarer Nähe der Anode beschleunigt. Sie erzeugen dann ihrerseits wieder Elektronen und Ionen durch Stoßionisation. Die Bewegung aller Ladungsträger verursacht im äußeren Widerstand einen Stromstoß und bewirkt dadurch einen negativen Spannungspuls. Dieser Puls wird über einen Koppelkondensator der Ausselektronik zugeführt.

1.2 Arbeitsbereiche eines Gasdetektors

Abbildung 1 zeigt die an der Anode ankommende Gesamtladungsmenge Q in Abhängigkeit von der Zählrohrspannung U (logarithmische Darstellung). A und B zeigen den Kurvenverlauf für zwei einfallende Teilchen mit unterschiedlichem Ionisierungsvermögen (z. B. A: α -Teilchen, B: β -Teilchen). Die Pulsamplitude am Ausgang des Zählrohrs ist proportional zu Q .

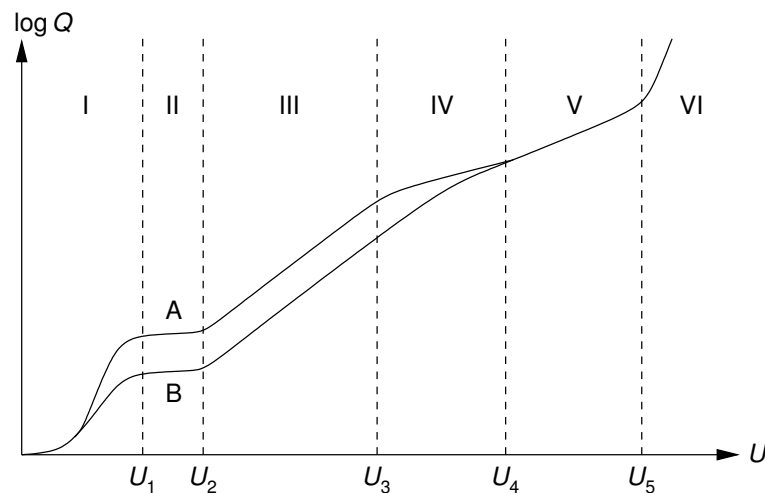


Abbildung 1: Gesamtladung in Abhängigkeit von der Zählrohrspannung

Bereich I: Die Pulsamplitude steigt mit der Spannung an. Mit zunehmender Spannung sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass die gebildeten Elektronen und Ionen rekombinieren.

Bereich II: Oberhalb einer Spannung U_1 findet keine Rekombination mehr statt. Die gemessene Ladungsmenge bleibt über einen gewissen Spannungsbereich konstant und ist gleich der Summe der primär erzeugten Ladungen. In diesem Bereich arbeitet die **Ionisationskammer**.

Bereich III: Ab einer Spannung U_2 werden die Elektronen in der Nähe der Anode so stark beschleunigt, dass sie bei Stößen weitere Gasatome ionisieren können. Es bauen sich Ladungslawinen auf. Die Ladungsmenge bleibt dabei jedoch proportional zur Zahl der primär erzeugten Ladungsträger. Ein Zählrohr, das in diesem Bereich betrieben wird, heißt deshalb **Proportionalzählrohr**. Die

durch Stoßionisation hervorgerufene Vervielfachung der primär erzeugten Ladung nennt man Gasverstärkung.

Bereich IV: Oberhalb der Spannung U_3 ist die Ladungsmenge nur noch bedingt proportional zur Zahl der primär erzeugten Ladungsträger.

Bereich V: Bei der Spannung U_4 beginnt der Auslösebereich. Ein Kennzeichen des Auslösebereichs ist, dass alle ionisierenden Teilchen unabhängig von Teilchenart und Energie den gleichen Spannungspuls verursachen. Ein Zählrohr, das in diesem Bereich arbeitet, wird **Geiger-Müller-Zählrohr** genannt. Die Gasverstärkung ($\approx 10^9$) ist beim Geiger-Müller-Zählrohr wesentlich größer als beim Proportionalzählrohr, sodass schon ohne weitere elektronische Verstärkung Pulse von einigen Volt erzeugt werden können.

Bereich VI: Mit steigender Spannung werden die Pulse immer größer, bis schließlich eine anhaltende Entladung auftritt, die das Zählrohr beschädigt.

1.3 Die Ionisationskammer (Beispiel für einen simplen Gasdetektor)

Die Ionisationskammer ist eines der ältesten Nachweisgeräte für radioaktive Strahlung und wird wegen ihres einfachen Aufbaus auch heute noch häufig verwendet. Sie ist schematisch in Abbildung 2 dargestellt.

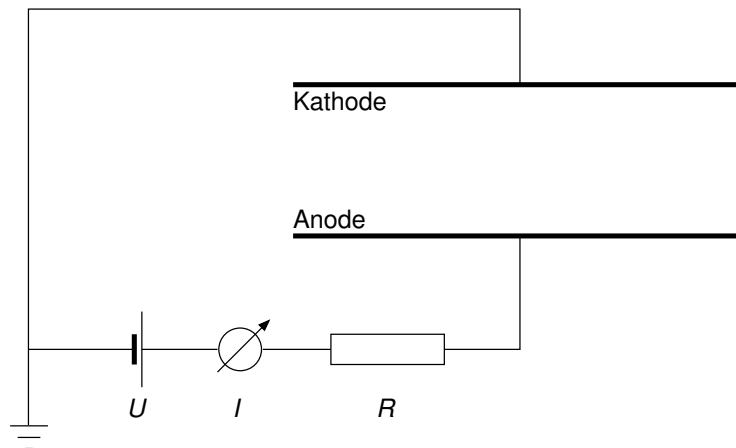


Abbildung 2: Schematische Darstellung einer Ionisations-Stromkammer

Unabhängig von Art und Energie des ionisierenden Teilchens beträgt die Energie zur Erzeugung eines Elektron-Ionen-Paars in Gasen etwa 30 eV. Gibt die einfallende Strahlung z. B. 1 MeV Energie in der Kammer ab, so werden rund $3 \cdot 10^4$ Elektron-Ionen-Paare gebildet, was einer Ladung von etwa $5 \cdot 10^{-15}$ C beiderlei Vorzeichens entspricht. Je nach Bauart werden die von den einfallenden Teilchen erzeugten Ladungen zu einem Konstantstrom aufintegriert (Stromkammer) oder liefern für jedes einzelne Teilchen einen Spannungspuls (Impulskammer).

Bei einem typischen Wert für die Kapazität von $C = 10^{-12}$ F zwischen den beiden Elektroden der Ionisationskammer erhält man z. B. bei einer Stromkammer mit einem Ladewiderstand von $R = 10^{12} \Omega$ eine Zeitkonstante von 1 s, die groß ist gegen die zur Sammlung der Ionen benötigte Zeit (≈ 1 ms). Man weist damit nicht den Durchgang einzelner Teilchen nach, sondern misst die über längere Zeiten integrierten Ströme. Solche Kammern werden z. B. zur Dosis- oder Dosisleistungsmessung im Strahlenschutz und zur Intensitätsüberwachung und -steuerung an Teilchenbeschleunigern benutzt. Die zu messenden Ströme bzw. Ladungen sind außerordentlich klein, daher ist eine gute elektrische Isolierung Voraussetzung für eine solche Kammer. Ein weiteres Problem sind Rekombinationsvorgänge im Gas, die einen linearen Zusammenhang zwischen absorbierter Energie und gemessenem Strom stören können.

Bei einer Impulskammer liegt der Widerstand in der Größenordnung von $R = 10^6 \Omega$ (to be confirmed), daher liegt die Pulslänge bei gleicher Kapazität in der Größenordnung von 1 μ s.

1.4 Das Proportionalzählrohr

Prinzip und Wirkungsweise

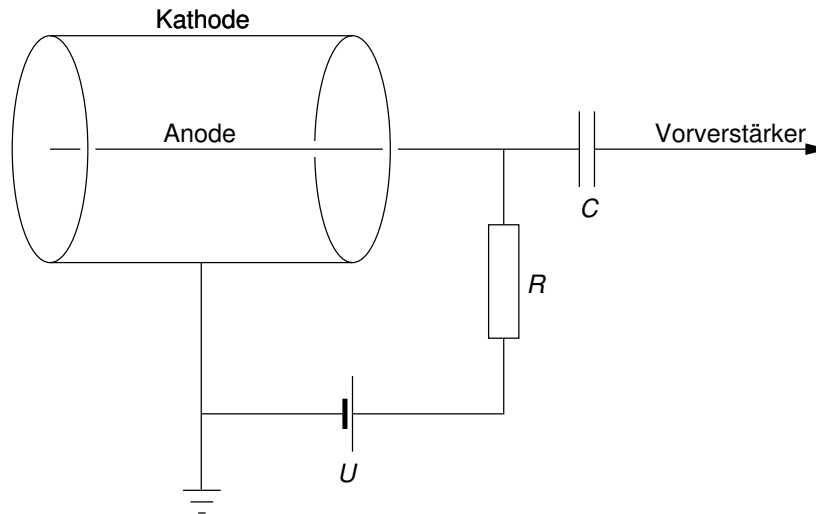


Abbildung 3: Schematische Darstellung eines Proportionalzählrohrs

Abbildung 3 zeigt ein Proportionalzählrohr in schematischer Darstellung. Der Rohrmantel (Kathode) ist geerdet. An einem dünnen Anodendraht (20 bis $100\ \mu\text{m}$ Durchmesser) ist über einen Widerstand ($R \approx 1\ \text{M}\Omega$) eine positive Hochspannung ($U \approx 1\ \text{kV}$) angelegt. Das Proportionalzählrohr besitzt aufgrund seiner Zylindergeometrie ein zur Anode hin stark zunehmendes elektrisches Feld ($E \propto 1/r$) mit Feldstärken von 10^4 bis $10^5\ \text{V/cm}$, sodass es in der Nähe des Anodendrahts zur Gasverstärkung kommt. Die Höhe der gemessenen Pulse ist dabei proportional zur Energie der Teilchen, sodass das Proportionalzählrohr für Energiemessungen benutzt werden kann. Der Gasverstärkungsfaktor (10^4 bis 10^6) steigt exponentiell mit der angelegten Spannung. Zusätzlich zur Stoßionisation kommt es zur Aussendung von UV-Photonen durch angeregte Atome. Diese Photonen lösen im Zählgas bzw. in den Kammerwänden Photoelektronen aus, die wieder neue Stoßionisationen bewirken können.

Bei der Verwendung reiner Edelgase als Gasfüllung wächst der Verstärkungsfaktor aufgrund der großen Zahl von Photoelektronen sehr schnell mit der Spannung an. Der Proportionalbereich ist deshalb sehr klein und für die Praxis wenig geeignet. Nimmt man mehratomige Gase, z. B. Methan, so wird der Proportionalbereich groß. Die UV-Photonen werden von den Molekülen absorbiert, d. h. die Moleküle dissoziieren oder werden zu Schwingungen angeregt. Die aus den Schwingungszuständen emittierten Quanten sind im Allgemeinen niederenergetischer und können keine Photoelektronen mehr auslösen. Oft werden Gasgemische aus Edelgasen und mehratomigen Molekülen verwendet. Mit dem Proportionalzählrohr erreicht man Auflösungszeiten von etwa $10\ \text{ns}$.

Durchflusszähler

Wenn man das Füllgas über ein Regulierventil ständig nachströmen lässt, spricht man von so genannten Durchflusszählern. Diese eignen sich besonders für Messungen von α - und niederenergetischen β -Teilchen sowie weicher Röntgenstrahlung, da das Präparat unmittelbar in das Zählvolumen eingebracht werden kann. Zählrohre ohne Durchfluss sind mit einer gasdichten Wandung fest verschlossen, durch die kurzreichweitige Strahlung nicht eindringen kann. Ein Methan-Durchflusszähler ist schematisch in Abbildung 4 dargestellt. In ihm strömt ein Argon-Methan-Gemisch (10% Methan) bei Atmosphärendruck durch das Zählvolumen, in dem eine dünne Drahtschleife als Anode und die Wandung als Kathode dienen.

Charakteristik des Proportionalzählrohrs

Unter der Charakteristik eines Zählrohrs versteht man die Abhängigkeit der Pulsrate (Zahl der Pulse pro Zeiteinheit) von der angelegten Spannung U . Bei einem Proportionalzählrohr ergibt sich der in Abbildung 5 dargestellte Verlauf, wenn α - und β -Teilchen gleichzeitig auftreten.

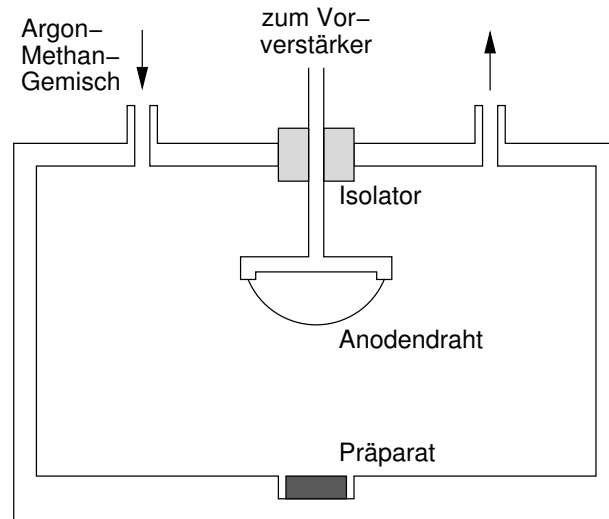


Abbildung 4: Schematische Darstellung eines Methan-Durchflusszählers

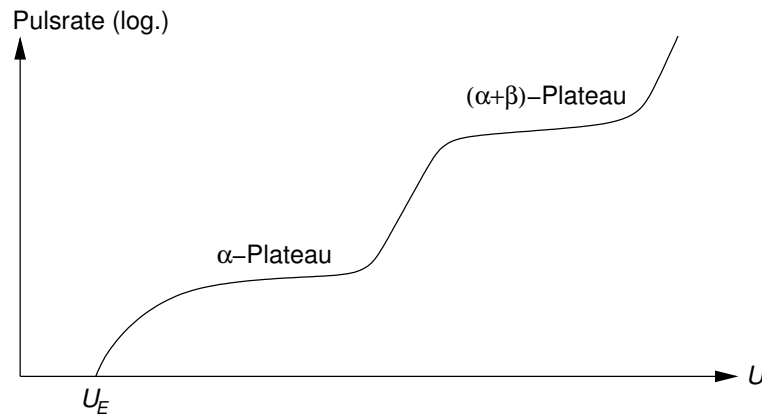


Abbildung 5: Charakteristik eines Proportionalzählrohrs bei Anwesenheit von α - und β -Teilchen

Bei einer bestimmten Spannung (Einsatzspannung U_E) wird die von der Eingangsempfindlichkeit des nachgeschalteten Verstärkers abhängige Mindestpulshöhe erreicht. Wegen der größeren Zahl von erzeugten Elektron-Ionen-Paaren werden dann zunächst nur α -Teilchen und erst bei höheren Spannungen auch β -Teilchen gezählt, sodass sich in der Charakteristik erst das so genannte α -Plateau und dann das $(\alpha + \beta)$ -Plateau ergibt (Abbildung 5). Durch entsprechende Wahl der Spannung lassen sich also beim Proportionalzählrohr verschieden große Primäronisationen, d. h. α - und β -Strahlung, unterscheiden.

1.5 Das Geiger-Müller-Zählrohr

Die Zählrohrentladung im Auslösebereich

Mit der Erhöhung der Feldstärke in einem Proportionalzählrohr werden immer mehr UV-Photonen beim Lawinenaufbau gebildet, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür ansteigt, durch Photonen auch an anderen, weiter entfernten Stellen des Zählrohrs über den Photoeffekt neue Elektronen freizusetzen. Diese Elektronen lösen neue Lawinen aus, wodurch sich die Entladung entlang des Zählrohrs ausbreitet. Nach Ende der Lawinenbildung ist der Zählrohr über seine ganze Länge von einem Plasmaschlauch umgeben. Das Zählrohr arbeitet im Auslösebereich.

Während der relativ kurzen Zeit (etwa 10 ns), in der die Elektronen abgesaugt werden, schirmt der Ionenschlauch, der sich nur langsam bewegt, das elektrische Feld des Zählrohrs ab. Die Raumladung des Ionenschlauchs bewirkt, dass die Feldstärke reduziert wird und damit kein neuer Lawinenaufbau möglich

ist. Die positiven Ionen wandern zur Kathode und werden dort am Zählrohrmantel neutralisiert. Dabei können Sekundärelektronen aus der Oberfläche ausgelöst werden, durch die der Entladungsprozess wieder von vorn beginnen würde. Man muss deshalb dafür sorgen, dass die Entladung „gelöscht“ wird.

Bei den nicht-selbstlöschenden Zählrohren erzwingt man den Löschkprozess, indem man sehr hohe Arbeitswiderstände R in der Zählrohrschaltung verwendet. Dadurch wird nach einem Teilchendurchgang ein so großer Spannungsabfall am Widerstand erzeugt, dass die Spannung am Zählrohr unter die Einsatzspannung sinkt. Hierbei muss die Zeitkonstante der Zählrohrschaltung so groß gewählt werden, dass der Spannungsabfall so lange anhält, bis alle Ionen den Zählrohrmantel erreicht haben.

Bei den selbstlöschenden Zählrohren wird dem Zählgas ein so genanntes Löschgase (z. B. Methan oder Kohlendioxid) beigemischt. Diese Gase haben breite Absorptionsbanden für die Absorption von UV-Photonen, die im Gasverstärkungsprozess auftreten. Außerdem kommt es zu Stößen der positiven Zählgasionen mit den Löschgasmolekülen, wobei aufgrund der verschiedenen Elektronenaffinitäten die Ladung der Zählgasionen auf das Löschgase übertragen wird. Es erreichen also nur noch Löschgaseionen den Zählrohrmantel. Wegen des niedrigen Ionisationspotenzials der Löschgaseionen sind diese nicht mehr in der Lage, am Mantel Sekundärelektronen auszulösen, und der Entladungsprozess erlischt.

Charakteristik des Geiger-Müller-Zählrohrs

Setzt man ein Geiger-Müller-Zählrohr einer konstanten Bestrahlung aus und nimmt man dann mit einem genügend empfindlichen Pulszähler die Pulsrate in Abhängigkeit von der am Zählrohr anliegenden Spannung U auf, so erhält man etwa den in Abbildung 6 dargestellten Kurvenverlauf. Es handelt sich um die Charakteristik des Zählrohrs. Bei der Einsatzspannung U_E ist das Zählrohr noch nicht im Auslösbereich. Die Pulshöhe hängt von der Energie der Teilchen ab und nur die größten Pulse werden gezählt. Mit wachsender Spannung werden die Pulse größer und damit wird ein immer größerer Teil der Pulse registriert. Bei Erreichen der Geigerschwelle U_G sind alle Pulse gleich groß. Ab dieser Spannung sollte die Pulsrate praktisch konstant sein (Plateau), in Wirklichkeit nimmt sie aber mit wachsender Spannung durch immer häufiger auftretende Mehrfachentladungen zu. Die Steigung des Plateaus beträgt bei guten Zählrohren nicht mehr als 1% Pulsratenänderung pro 100 V Spannungsänderung. Wird die Spannung weiter erhöht, tritt eine Dauerentladung ein, die das Zählrohr beschädigt. Um einerseits sicher zu sein, nicht auf dem ansteigenden Teil der Charakteristik zu liegen, andererseits aber das Zählrohr zu schonen, wählt man als Arbeitsspannung in diesem Versuch $U = U_G + 100 \text{ V}$. Die Wahl des Arbeitspunktes hängt im Allgemeinen sehr stark von der Art des Zählrohrs und vom Gasmisch ab. Je nach Gasmischung kann es auch vorkommen, dass das Plateau sehr kurz oder praktisch nicht vorhanden ist.

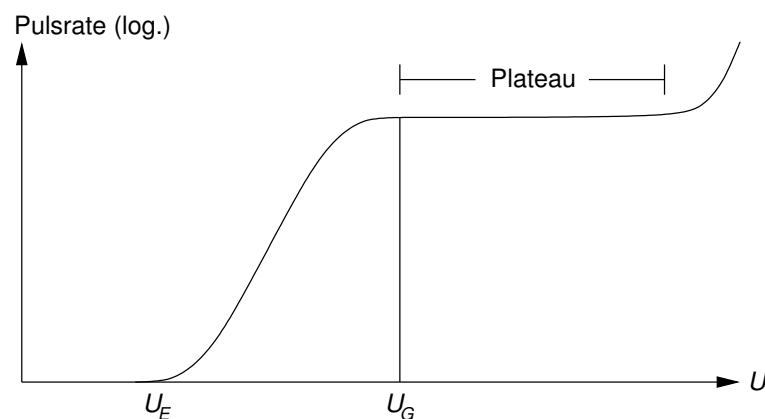


Abbildung 6: Charakteristik eines Geiger-Müller-Zählrohrs

Tot- und Erholungszeit des Zählrohrs

Hat ein Teilchen in einem Geiger-Müller-Zählrohr eine Entladung ausgelöst, so dauert es wegen der relativ geringen Beweglichkeit der positiven Ionen eine gewisse Zeit, bis diese zur Kathode gewandert sind. Während dieser Zeit schwächt die Raumladung der positiven Ionen das Feld in der Nähe des Zählrohrs.

ab. Ein Teilchen, das in diesem Moment das Zählrohr durchquert, verursacht keinen Puls oder nur eine geringe Pulshöhe.

Man unterscheidet dabei zwischen der eigentlichen Totzeit T_d (death time) und der Erholungszeit T_r (recovery time). Die Totzeit ist die Zeit, die zwischen Teilchendurchgang und erneuter Aufnahmebereitschaft für das nächste Teilchen verstreicht. Dann hat sich der Ionenschlauch so weit vom Zählrohr entfernt, dass wieder eine Gasverstärkung stattfinden kann. Die Erholungszeit ist verstrichen, wenn die Ionenwolke die Kathode erreicht hat. Danach erlangen die Pulse wieder ihre ursprüngliche Höhe.

Totzeit und Erholungszeit eines Zählrohrs können nach einer von H. Guyford Stever angegebenen Methode mit einem Oszilloskop dargestellt und gemessen werden: Die vom Zählrohr ausgehenden Signale werden auf ein Oszilloskop gegeben und die Triggerschwelle U_T wird so eingestellt, dass die voll ausgebildeten Pulse am Beginn der Zeitachse sichtbar werden. Bis zum Ende der Totzeit erscheint dann kein weiterer Puls mehr auf dem Schirm. In der Erholungszeit treten wieder Pulse auf, deren Höhe mit der Zeit zunimmt und schließlich wieder den ursprünglichen Wert erreicht. Durch Überlagerung mehrerer Aufnahmen (Nachleuchten des Oszilloskops) erhält man eine Folge von Pulsen, an deren Einhüllender die Tot- und die Erholungszeit ablesbar sind (siehe Abbildung 7).

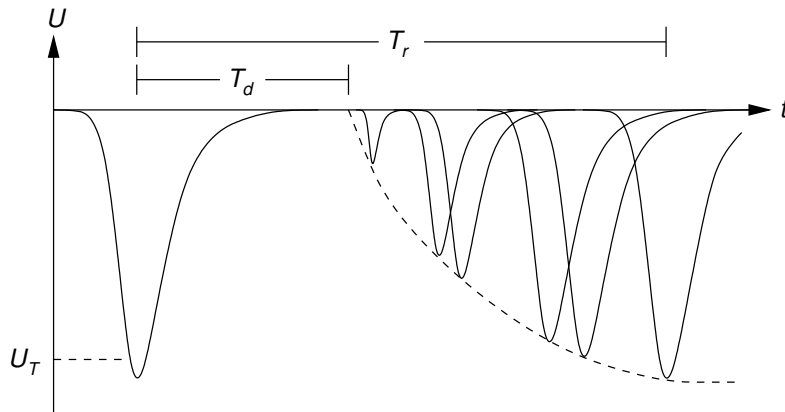


Abbildung 7: Stever-Diagramm zur Bestimmung von Tot- und Erholungszeit

Für die Messung ist diejenige Zeit entscheidend, nach der das Zählrohr wieder einen Puls liefern kann, der groß genug ist, um vom Pulszähler registriert zu werden. Diese so genannte Auflösungszeit τ hängt von der Verstärkung des Pulszählers und von der eingestellten Schwelle des Verstärkers ab und liegt zwischen T_d und T_r .

Totzeitkorrektur

Wird von einem Zählrohr mit Auflösungszeit τ eine Pulsrate von n Teilchen pro Sekunde gezählt, so war das Zählrohr während des Bruchteils $n \cdot \tau$ der Zeit unempfindlich. Wenn insgesamt N ionisierende Teilchen pro Sekunde das Zählrohr durchquert haben, so wurden davon $N \cdot n \cdot \tau$ Teilchen nicht registriert. Die gemessene Pulsrate n ergibt sich aus der Differenz von wirklicher Pulsrate N und der Teilchenzahl $N \cdot n \cdot \tau$, die pro Zeiteinheit nicht registriert wird:

$$n = N - Nn\tau \quad \text{oder} \quad N = \frac{n}{1 - n\tau}$$

In einer so genannten Totzeitstufe werden nach Durchgang eines Zählpulses weitere Zählpulse für ein einstellbares Zeitintervall τ_i gesperrt. Es wird also künstlich eine Totzeit bekannter bzw. messbarer Dauer τ_i erzeugt. Misst man die Zählrate n_1 bei einer Totzeit τ_1 der Stufe, die wesentlich größer ist als die Auflösungszeit τ des Zählrohrs, so ist die wahre Pulsrate N :

$$N = \frac{n_1}{1 - n_1\tau_1} \quad (\tau_1 \gg \tau)$$

Wiederholt man diese Messung mit einer anderen Totzeit τ_2 , die wesentlich kleiner ist als die Auflösungszeit τ des Zählrohrs, so wird die gemessene Zählrate n_2 durch die Auflösungszeit des Zählrohrs bestimmt:

$$N = \frac{n_2}{1 - n_2\tau} \quad (\tau_2 \ll \tau)$$

Aufgabe: Leiten Sie eine Formel zur Bestimmung der Auflösungszeit eines Zählrohrs mit Hilfe einer Totzeitstufe her.

2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Statistik

2.1 Binomial-, Poisson- und Gaußverteilung

Der radioaktive Zerfall ist ein typisches Beispiel für einen statistischen Zufallsprozess. Die Atomkerne eines Präparats stellen eine sehr große statistische Stichprobe dar. Die beobachtete Zerfallsrate des Präparats wird durch die Zerfallswahrscheinlichkeit der einzelnen Atomkerne festgelegt, die eine Naturkonstante ist und praktisch nicht von äußeren Bedingungen beeinflusst werden kann. Die Zerfälle verschiedener Kerne sind unabhängig voneinander und führen so zu den beobachteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Binomialverteilung

Sind n radioaktive Atome vorhanden, von denen jedes in einem festen Zeitintervall mit der Wahrscheinlichkeit p zerfällt, interessiert die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ dafür, dass in diesem Zeitintervall genau k Atome zerfallen. Da es sich um n gleichartige Atome handelt, kann man aus ihnen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

verschiedene Gruppen von k Atomen auswählen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(k)$ ist dann die Binomialverteilung (siehe Abbildung 8):

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Der Erwartungswert dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich zu

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k P(k) = np,$$

als Standardabweichung erhält man

$$\sigma = \sqrt{\overline{k^2} - \bar{k}^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^n k^2 P(k) - \left(\sum_{k=0}^n k P(k)\right)^2} = \sqrt{np(1-p)}.$$

Poissonverteilung

Ist n sehr groß, sodass k klein gegen n ist, so erhält man im Grenzübergang $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ mit $np = \text{const} = \mu$ die Poissonverteilung (siehe Abbildung 9) als Näherung der Binomialverteilung (1):

$$P(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Der Erwartungswert der Poissonverteilung ist

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k) = np = \mu,$$

die Standardabweichung ergibt sich zu

$$\sigma = \sqrt{np} = \sqrt{\mu}.$$

Die Poissonverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass k Ereignisse stattfinden, wenn der Erwartungswert μ beträgt.

Gaußverteilung

Wird μ groß (dazu genügt bereits $\mu \approx 10$), so geht die Poissonverteilung (2) als Näherung in die Gauß- oder Normalverteilung (siehe Abbildung 10) über:

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

Die Gaußverteilung ist im Gegensatz zur Binomial- und Poissonverteilung eine kontinuierliche Verteilung, d. h. sie ist für alle reellen Zahlen k definiert. Sie ist symmetrisch um den Mittelwert μ mit der Breite σ . In dem speziellen Fall, dass sich die Gaußverteilung als Näherung einer Poissonverteilung ergibt, sind μ und σ nicht unabhängig voneinander, sondern es gilt ebenso wie für die Poissonverteilung die Beziehung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \quad (4)$$

Exponentialverteilung

Bei einem Zufallsprozess, bei dem im Mittel μ Kerne pro Zeitintervall T zerfallen, sodass es eine feste Ereignisrate $A = \mu/T$ gibt, interessiert unter Umständen die Zeitdauer Δt zwischen zwei aufeinander folgenden Ereignissen. Beim radioaktiven Zerfall, dem ein Poisson-Prozess zugrunde liegt, sind die einzelnen Zerfälle unabhängig voneinander, sodass es keine Rolle spielt, wieviel Zeit seit dem letzten Zerfall vergangen ist. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im nächsten Zeitintervall T ein Kern zerfällt, eine Konstante.

Als Wahrscheinlichkeitsdichte für die gemessene Zeitdauer Δt zwischen zwei aufeinander folgenden Zerfällen ergibt sich dann eine Exponentialverteilung:

$$\rho(\Delta t) = A \exp(-A \Delta t)$$

Der Erwartungswert der Exponentialverteilung ist A^{-1} , die Standardabweichung ist ebenfalls A^{-1} .

2.2 Streuung und Messunsicherheit

Die Tatsache, dass bei der Poissonverteilung und der speziellen Gaußverteilung die Beziehung (4) gilt, d. h. dass die Standardabweichung bereits durch den Mittelwert festgelegt wird, ist außerordentlich wichtig. Praktisch bedeutet dies, dass die Streuung einer gemessenen Pulszahl N (und jeder Messgröße, von der man weiß, dass ihr ein Poisson-Prozess zugrunde liegt) durch eine einzige Messung bereits bekannt ist, denn wenn N nicht zu klein ist, gilt $N \approx \bar{N}$ und $\sigma \approx \sqrt{N}$. Die aufwändige Bestimmung von σ entfällt. Das Messergebnis ist umso genauer, je größer die Pulszahl N ist, denn für den relativen Fehler der Messung gilt:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\sigma}{\mu} \approx \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Unter der Annahme, dass eine Messreihe durch eine Gaußverteilung beschrieben werden kann, ist der Anteil aller Messwerte, der innerhalb eines vorgegebenen Intervalls $[\bar{N} - a, \bar{N} + a]$ liegt, durch das Integral der Wahrscheinlichkeitsverteilung (3) über diesem Intervall gegeben, also

$$\int_{\bar{N}-a}^{\bar{N}+a} P(N) dN.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Einzelmessung in das gegebene Intervall fällt, ergibt sich hieraus für $a = \sigma$ zu 68,3 %, für $a = 2\sigma$ zu 95,4 % und für $a = 3\sigma$ zu 99,7 %.

2.3 Die χ^2 -Anpassung

Gegeben sei eine Folge x_i von n gaußverteilten Messwerten mit den Fehlern σ_i und eine Folge von Werten $X_i = X_i(\vec{a})$, die aufgrund eines Modells erwartet werden und die von Parametern $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ abhängen. Diese Parameter sollen so geschätzt werden, dass das Modell möglichst gut mit den Messwerten

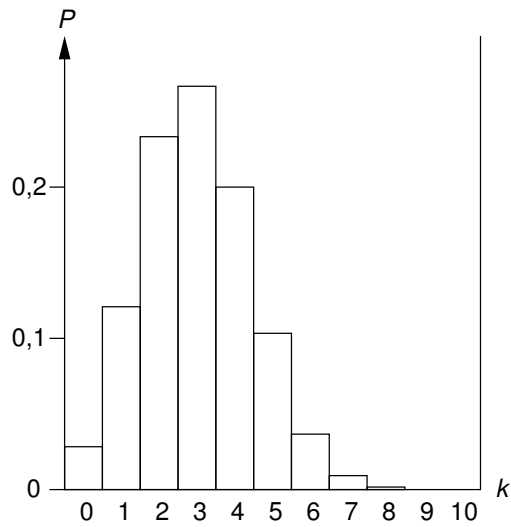


Abbildung 8: Binomialverteilung mit $n = 10$, $p = 0,3$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein instabiler Kern beim Zerfall ein γ -Quant abstrahlt, beträgt 30%. Wie viele von zehn beobachteten Zerfällen zeigen eine γ -Emission?

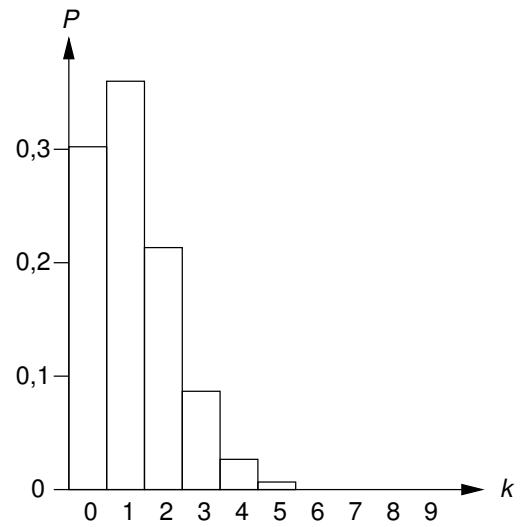


Abbildung 9: Poissonverteilung mit $\mu = 1,2$. Eine radioaktive Probe enthält $3 \cdot 10^{12}$ instabile Kerne, von denen jeder einzelne mit einer Wahrscheinlichkeit von $4 \cdot 10^{-13}$ innerhalb der nächsten Sekunde zerfällt. Wie viele Zerfälle werden pro Sekunde beobachtet?

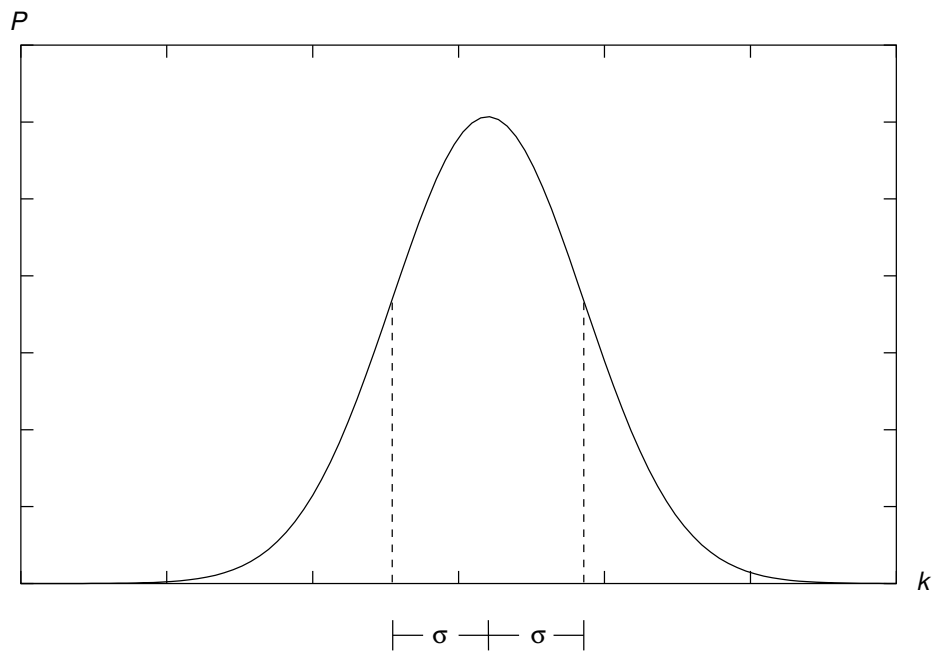


Abbildung 10: Spezielle Gaußverteilung mit $\mu = 4320$, $\sigma = \sqrt{4320}$. Die Messung von Abbildung 9 wird eine Stunde lang durchgeführt. Wie viele Zerfälle werden in einer Stunde beobachtet?

übereinstimmt. Dann ist die Funktion $\chi^2(\vec{a})$ ein Maß für die Abweichungen der gemessenen von den erwarteten Werten, wobei jede Abweichung entsprechend dem Fehler des Messwerts gewichtet wird:

$$\chi^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - X_i(\vec{a}))^2}{\sigma_i^2}$$

Die Summe läuft über alle Messungen i .

Die beste Übereinstimmung zwischen Messwerten und Modell entspricht dem Minimum von $\chi^2(\vec{a})$. Bei der χ^2 -Anpassung werden daher die Parameter \vec{a} des Modells so lange variiert, bis das Minimum von χ^2 erreicht ist. Die zugehörigen Parameterwerte sind dann die bestmöglichen Schätzwerte.

Bei der Auswertung von Experimenten interessiert neben den optimalen Schätzwerten der Parameter auch die Unsicherheit dieser Schätzungen. Bei der χ^2 -Anpassung erhält man den statistischen Fehler der geschätzten Parameterwerte aus der Erhöhung des Funktionswerts $\chi^2(\vec{a})$ von χ^2_{\min} auf $\chi^2_{\min} + 1$ (siehe Abbildung 12).

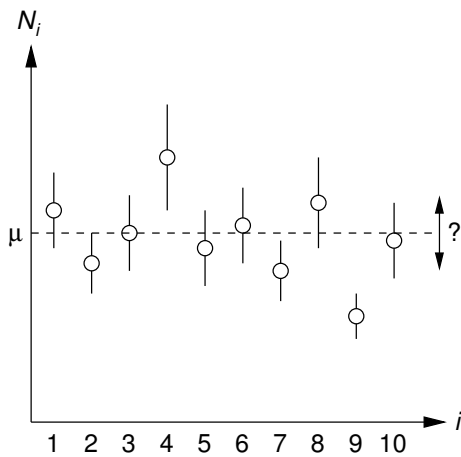


Abbildung 11: Messung von zehn Pulsraten N_i

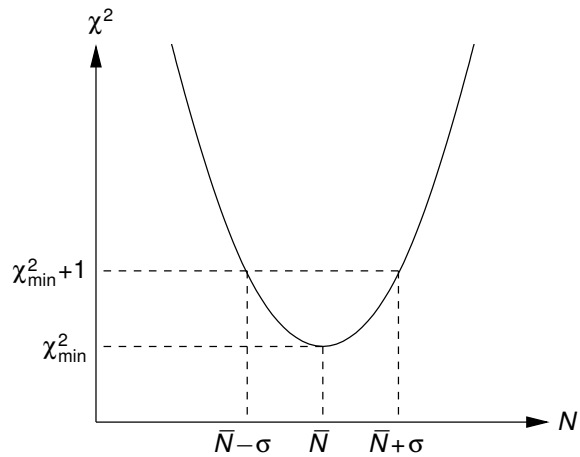


Abbildung 12: Minimum der Funktion χ^2

Als einfachstes Beispiel ist in Abbildung 11 die Messung von 10 Pulsraten $x_i = N_i$ gezeigt. Da man für jede der zehn Messungen als Pulsrate den Wert μ erwartet, ist die theoretische Erwartung durch $X_i(\mu) = \mu$ gegeben. Sie hängt in diesem Beispiel also nur von einem einzigen zu schätzenden Parameter μ ab. Trägt man die Funktion $\chi^2(\mu)$ gegen μ auf, so erhält man eine parabelförmige Kurve wie in Abbildung 12 mit einem Minimum bei $\mu = \bar{N}$. Der Mittelwert \bar{N} ist die bestmögliche Schätzung des Parameters.

Dieses Beispiel dient nur der Veranschaulichung der χ^2 -Anpassung. Eine sinnvolle Anwendung erfährt sie natürlich bei komplizierteren theoretischen Abhängigkeiten, z. B. bei der Gaußverteilung mit den beiden Parametern μ und σ .

2.4 Der χ^2 -Test

Weiterhin von Bedeutung ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Wiederholung des Experiments trotz gleicher Versuchsbedingungen einen größeren Wert für χ^2 zu erhalten. In der Statistik wird gezeigt, dass für einen großen Stichprobenumfang die zu χ^2 gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung (die so genannte χ^2 -Verteilung) die folgende Form hat:

$$P_n(\chi^2) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade n ist gleich der Anzahl der unabhängigen Bestimmungsgleichungen zwischen dem Parametervektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ und dem Beobachtungsvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$. Man erhält die Anzahl der Freiheitsgrade, wenn man von der Zahl der Messwerte die Zahl der variierten unabhängigen Parameter abzieht, wobei in vielen Fällen durch die Normierung der theoretischen Verteilung auf die experimentelle Ereigniszahl ein weiterer Freiheitsgrad verloren geht. Abbildung 13 zeigt den Verlauf der

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\chi^2)$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10$ und 20 . Die Kurven $P_n(\chi^2)$ haben ihr Maximum etwas unterhalb des Wertes $\chi^2 = n$.

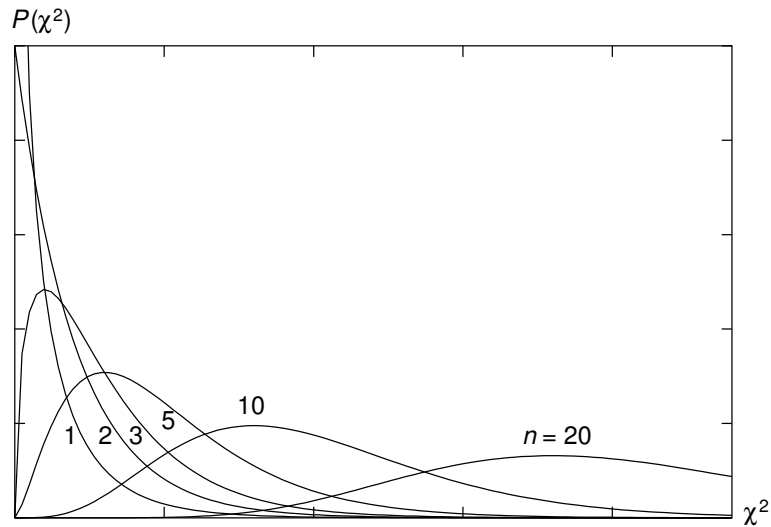


Abbildung 13: χ^2 -Verteilung $P_n(\chi^2)$ für verschiedene Werte von n

Das Integral

$$F_n(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{\infty} P_n(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei einer Wiederholung des Experiments einen größeren Wert für χ^2 zu finden. $F_n(\chi^2)$ ist daher ein Maß für die Güte der Hypothese, dass die experimentellen Daten durch die vorliegende Theorie richtig beschrieben werden. Sehr kleine Wahrscheinlichkeitswerte ($F < 0,05$) deuten auf eine schlechte Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie hin. Die Funktion $F_n(\chi^2)$ ist in Abbildung 14 für verschiedene Werte von n dargestellt.

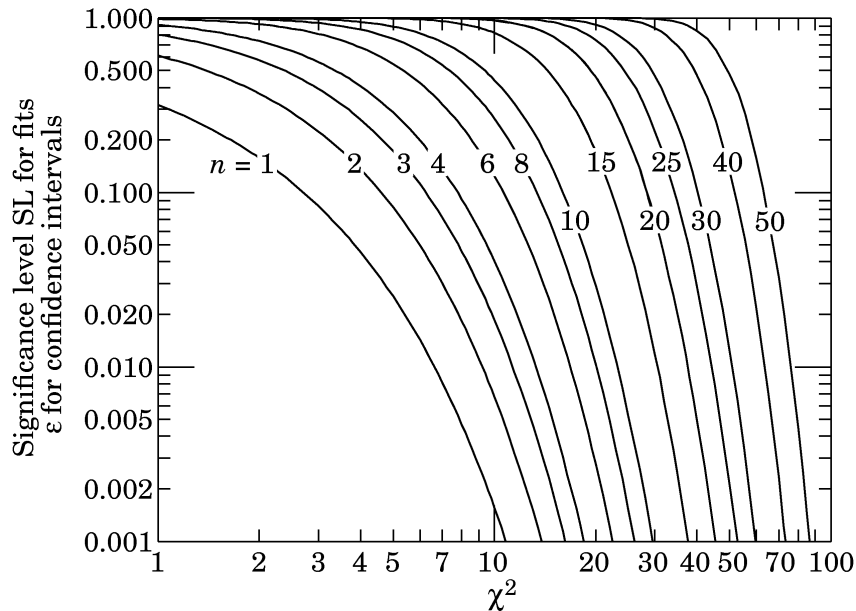


Abbildung 14: Die Funktion $F_n(\chi^2)$ für verschiedene Werte von n

3 Versuchsdurchführung

3.1 Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr

Nehmen Sie das Geiger-Müller-Zählrohr in Betrieb und beobachten Sie die Pulse auf dem Oszilloskop. An das Geiger-Müller-Zählrohr darf eine Spannung von **maximal 700 V** angelegt werden! Bauen Sie mit Hilfe der NIM-Module eine Apparatur, die sich für die Messung von Zählraten eignet.

1. Messung der Zählrohrcharakteristik: Bringen Sie das $^{90}_{38}\text{Sr}$ -Präparat in die Bleikammer. Messen Sie die Pulsrate des Geiger-Müller-Zählrohrs in Abhängigkeit von der Hochspannung. Bestimmen Sie die Einsatzspannung U_E und die Geiger-Schwelle U_G .
2. Wählen Sie als Betriebsspannung $U = U_G + 100 \text{ V}$. Von jetzt sollte diese Einstellung nicht mehr verändert werden.
3. Überprüfen Sie wie groß der Untergrund ist: messen Sie die Pulserate ohne Quelle in der Bleikammer.
4. Erzeugen Sie auf dem Oszilloskop ein Steverdiagramm. Benutzen Sie hierzu direkt das Ausgangssignal des Zählrohrs. Schätzen Sie die Totzeit und die Erholungszeit des Zählrohrs ab.
5. Verwenden Sie die Pulse des 1-MHz-Generators, die an der Rückseite des Zählers zur Verfügung stehen, und verifizieren Sie die auf der Totzeitstufe angegebenen elektronisch erzeugten Totzeiten der Stufe. Nutzen Sie zu diesem Zweck den Zähler und notieren Sie jeweils die Pulsrate.
6. Die Pulse aus dem Geiger-Müller-Zählrohr sollen nun vor dem Zähler die Totzeitstufe durchlaufen. Messen Sie die Zählraten bei kleiner und großer Totzeit der Stufe und bestimmen Sie daraus die Totzeit des Zählrohrs. Achten Sie auf eine genügend große Zahl von Ereignissen pro Zeiteinstellung.

3.2 Messungen zur Statistik

1. Stellen Sie die Messzeit fest ein, sodass Sie im Mittel mindestens 25 Ereignisse pro Messung registrieren. Messen Sie die Zahl der Ereignisse pro Messzeit. Nehmen Sie genügend Messungen, um später eine Gauß-Verteilung darstellen zu können.
2. Entfernen Sie das Präparat aus dem Bleibunker und stellen Sie die Messzeit so ein, dass die **mittlere Ereigniszahl** pro Messung höchstens 2 beträgt. Machen Sie wieder genügend Messungen, um später eine Verteilung der Poisson-Statistik darstellen zu können. (Kann mit der Untergrundmessung des Geiger-Müller-Zählrohrs kombiniert werden.)
3. (empfohlen für Bachelor-Studenten) Messen Sie die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Ereignissen. Verwenden Sie dazu wieder das $^{90}_{38}\text{Sr}$ -Präparat und das Oszilloskop. Wählen Sie eine geeignete Zeitskala, so dass genügend Ereignisse (aber weniger als 80) in einer Aufnahme zu sehen sind und speichern Sie diese als CSV-Datei ab. Wiederholen Sie diesen Schritt bis eine ausreichende Anzahl von Zeitabständen zur Verfügung steht. Erstellen Sie ein Histogramm der gemessenen Zeiten und erklären Sie das Ergebnis. (Hinweis: Dieser Verstuchsteil kann sowohl mit dem Geiger-Müller-Zählrohr als auch mit dem Proportionalzähler durchgeführt werden, wobei dann natürlich eine andere Quelle benutzt werden sollte.)
4. Alternativ können die Zeitabstände auch mit Hilfe des Zählers von Hand aufgenommen werden. Anschließend erstellen sie ein Histogramm der gemessenen Zeiten und erklären Sie das Ergebnis.

3.3 Messung der Charakteristik eines Proportionalzählers

Der Methan-Durchflusszähler muss mit einem Zählgas (Argon-Methan-Gemisch) kontinuierlich gespült werden. Stellen Sie einen ausreichenden Gasfluss ein: etwa 4 Skalenteile am Durchflussmesser, im Schauglas sollten Blasen aufsteigen. **Die Maximalspannung für dieses Zählrohr beträgt 2 kV. Bitte beachten Sie dabei auch den Schalter neben dem Spannungsregler, der die eingestellte Spannung nochmal mit einem Faktor multipliziert.**

1. Bringen Sie das $^{241}_{95}\text{Am}$ -Präparat in den Probenwechsler und messen Sie die Pulsrate sowie die Pulshöhe (Maß für die Gasverstärkung) der α -Teilchen in Abhängigkeit von der Spannung. Wählen Sie geeignete Spannungsschritte. Warum sind nicht alle Pulse gleich hoch, obwohl es sich um monoenergetische Teilchen handelt?
2. Wiederholen Sie die gleiche Messung mit dem $^{14}_6\text{C}$ -Präparat.
3. Überprüfen Sie wie groß der Untergrund ist: messen Sie die Pulserate ohne Quelle im Zählrohr. Hierfür bietet es sich an, dieselben Schrittweite für die Spannung zu wählen wie zuvor.

3.3.1 Falls dieser Versuchsteil vor dem Geiger-Müller-Zählrohr stattfindet

- Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie schon Punkt 2 aus Messungen zur Statistik mit Hilfe des Proportionalzählers durchführen. Wählen Sie hierfür eine Spannung innerhalb des α -Plateaus (vgl. Messung mit dem $^{241}_{95}\text{Am}$ -Präparat).

4 Versuchsauswertung

4.1 Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr

1. Berechnen Sie die Auflösungszeit mit Hilfe der Totzeitstufe und vergleichen Sie sie mit den am Oszilloskop erhaltenen Ergebnissen. Zeichnen Sie die Totzeitkorrektur.
2. Stellen Sie die Zählrohrcharakteristik mit der Totzeitkorrektur graphisch dar.

4.2 Messungen zur Statistik

1. Fassen Sie die gemessenen Werte in sinnvoll gewählte Intervalle zusammen und tragen Sie sie in Form von Histogrammen auf.
2. Berechnen Sie für jede der Messreihen (Gauß-, Poisson- und Exponentialverteilung) Mittelwert und Standardabweichung. Berechnen Sie hieraus jeweils die erwartete Verteilung und tragen Sie diese in die gemessene Verteilung ein. (Hinweis: Falls Sie die Daten für die Messung der Zeitabstände mit dem Oszilloskop aufgenommen haben, nutzen Sie für diese Analyse die Messwerte aus der Datei mydata_???ms_ascii.txt (s.u.).)
3. Prüfen Sie die Güte Ihrer Vorhersage der gemessenen Verteilung, indem Sie für jede Verteilung einen χ^2 -Test durchführen. Berechnen Sie hierzu das χ^2 zwischen den erwarteten und den gemessenen Verteilungen und schätzen Sie mit Hilfe von Abbildung 14 die Wahrscheinlichkeit der Hypothese ab. Betrachten Sie nur die Intervalle, die mehr als 4 Einträge enthalten.
4. Führen Sie mit Hilfe eines Programms (z.B. Origin, Maple, Mathematica, Root, ...) χ^2 -Anpassungen der Messungen durch. Vergleichen Sie jeweils Mittelwert, Standardabweichung und χ^2 mit Punkt 2 und 3.
5. (Hinweis zur Auswertung der Zeitdifferenzen) Werten Sie die gespeicherten Oszilloskopdaten (.CSV) mit Hilfe des BASH-Skripts 'findpeaks.sh' und des Programms 'findpeaks.exe' aus, welche sie auf der Seite dieses Versuchs des [Bachelor-Praktikums](#) herunterladen und im CIP-Pool unter Linux verwenden können. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
 - (a) Erzeugen Sie ein Verzeichnis und kopieren Sie Ihre Daten sowie die Dateien 'findpeaks.sh' und 'findpeaks.exe' dorthin.
 - (b) Machen Sie diese Dateien ausführbar:


```
chmod u+x findpeaks.*
```
 - (c) Erzeugen Sie mit Hilfe von 'findpeaks.sh' eine Liste Ihrer Oszilloskopdaten-Dateien:


```
./findpeaks.sh ./
```

Sie sollten nun eine Datei mit Namen 'myfilelist.txt' im Verzeichnis vorfinden.

- (d) Anschliessend können Sie das Programm 'findpeaks.exe' starten, um die Auswertung zu beginnen:

```
./findpeaks.exe myfilelist.txt -0.1
```

Die (negative) Schwelle von -0.1 wird benötigt, um eine 'Mindestgröße' der negativen Pulse des Zählrohrs zu fordern (bei Bedarf können Sie ja damit experimentieren...). Kontrollieren Sie an Hand der erzeugten Bilder (s.u.), ob Ihre Wahl der Schwelle sinnvoll war.

- (e) Sollte das Programm ohne Fehlermeldung durchgelaufen sein, werden Sie eine Menge neue Dateien in Ihrem Verzeichnis finden: Zum einen gibt es Bilder (mygraph_osc_?.png) jedes gespeicherten Oszilloskopbildschirms (schwarz: Originaldaten, rot: nach Rauschunterdrückung, blau: rekonstruierte Peakpositionen) sowie ein Bild des Histogramms der Zeitabstände (myhist_delta_t_?.png). Zum anderen wurde eine ROOT-Datei (myhists.root) erzeugt, die das oben genannte Histogramm enthält. Falls Sie die χ^2 -Anpassungen lieber mit einem anderen Programm als ROOT vornehmen wollen, verwenden Sie stattdessen eine der ASCII-Dateien mit dem Dateninhalt des Histogramms (myhist_?.ms_ascii.txt).

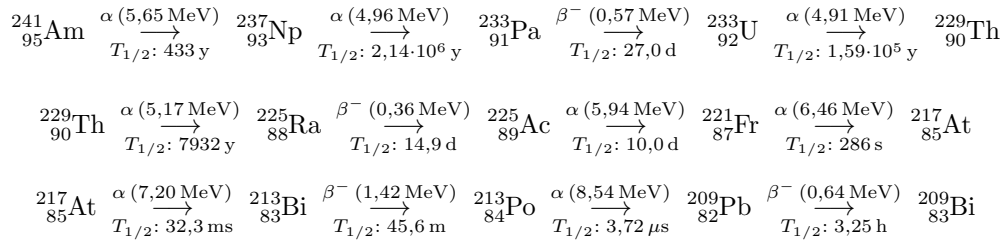
4.3 Messungen mit dem Proportionalzählrohr

1. Tragen Sie die gemessenen Pulsraten der drei Präparate auf gegen die Spannung auf und diskutieren Sie die Unterschiede.
2. Tragen Sie die Pulshöhen der Präparate in Abhängigkeit von der Spannung in einer geeigneten Skalierung auf. Begründen Sie ihre Wahl. Diskutieren Sie den Verlauf der Kurven.

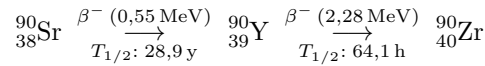
Anhang

A Eigenschaften der verwendeten radioaktiven Präparate

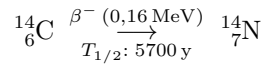
- $^{241}_{95}\text{Am}$: Offenes, aber berührungssicher abgedecktes Präparat; Substanz stirnseitig 1 mm Durchmesser, das Präparat ist 1,5 mm tief versenkt; Abdeckfolie vor der radioaktiven Substanz: $3\ \mu\text{m}$ Gold ($\rho = 19,3\ \text{g/cm}^3$). Zerfallsreihe:



- $^{90}_{38}\text{Sr}$: Umschlossenes Präparat; Plexiglasscheibe in Stahlblech gefasst. Zerfallsreihe:



- $^{14}_6\text{C}$: Umschlossenes Präparat, Zerfall:



B Bethe-Bloch-Formel

Zur Berechnung des Energieverlustes von α -Teilchen in Luft kann folgende Darstellung der Bethe-Bloch-Formel verwendet werden:

$$-\frac{dE}{dx} = \kappa \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} \right) \right] \quad (5)$$

Dabei ist

- $\kappa = 2\pi N_0 r_e^2 m_e c^2 = 0,154\ \text{MeV cm}^2/\text{g}$,
- $\rho = 1,225 \cdot 10^{-3}\ \text{g/cm}^3$ die Dichte von Luft am Boden,
- Z die Kernladungszahl von Luft (hauptsächlich Stickstoff),
- $m_e c^2 = 0,511\ \text{MeV}$ die Masse des Elektrons,
- $I \approx 15\ \text{eV}$ das mittlere Ionisationspotenzial von Luft,
- A das Atomgewicht von Luft,
- z die Ladung des durchquerenden Teilchens,
- $\beta = \sqrt{E_\alpha / \frac{1}{2} m_\alpha c^2}$ die Geschwindigkeit des durchquerenden Teilchens in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit (E_α ist die Energie und m_α die Masse der α -Teilchen) und
- $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ der Lorentzfaktor.